MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 13
29.1.2020

Übungen zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Die folgenden Wiederholungsfragen sind unabhängig zur Klausur, haben auch keinen direkten Bezug zu ihr und decken auch nicht den gesamten Stoff ab. Die Antworten finden Sie im Skript oder in der Zentralübung
Die Abkürzung R.o.f. steht für „Richtig oder falsch?“

a) Wie lautet der Satz von Schwarz?

b) Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, daß eine 2-mal stetig partiell diffbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $a \in \mathbb{R}^2$ ein lokales Extremum besitzt. Ist Ihre Bedingung auch notwendig?

c) Wie lautet die allgemeine Form einer inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung?

d) R.o.f: Jede homogene lineare DGL 1. Ordnung ist eine DGL mit getrennten Variablen.

e) R.o.f: Sind φ_1, φ_2 Lösungen von $y' = a(x)y + b(x)$, so ist auch $2\varphi_1 - \varphi_2$ Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$.

f) R.o.f: Die DGL $y' = x^2 \cdot (y + e^y)$ hat keine konstante Lösung.

g) Geben Sie eine homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten an, so daß die Funktionen $\varphi_1(x) = e^{2x}$ und $\varphi_2(x) = e^{-3x}$ Lösungen sind.

h) R.o.f: Die homogene lineare DGL 3. Ordnung $y''' + ay'' + by' + y = 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat stets eine unbeschränkte Lösung.

i) Welche euklidische Normalform kann, in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $\det A$, die Quadrik $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^\top \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0 \right\}$ besitzen?

j) R.o.f: Die Quadrik Q mit der Gleichung $2xy + x + y = 0$ ist eine Hyperbel.

k) Wann sind zwei Quadriken Q_1, Q_2 euklidisch, wann affin äquivalent? Gibt es einen Zusammenhang zwischen diesen Begriffen?

l) R.o.f: Sind Q_1 und Q_2 affin äquivalent, f eine Affinität mit $f(Q_1) = Q_2$, und g eine Symmetrieachse von Q_1, so ist $f(g)$ eine Symmetrieachse von Q_2.

m) Welche 2 Möglichkeiten gibt es, die euklidische Normalform eine Quadrik zu bestimmen? Skizzieren Sie beide Verfahren! Funktionieren Sie beide bei jeder Quadrik?

n) R.o.f: Die Menge aller Punkte $P \in \mathbb{R}^2$, die von einer gegebenen Gerade g und einem gegebenen Punkt F den gleichen Abstand haben, ist stets eine Parabel.

o) R.o.f: Jede Quadrik Q mit der Gleichung $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta = 0$ ist eine Ellipse.

p) R.o.f: Jede Quadrik Q mit der Gleichung $x^2 + y + \alpha x + \beta = 0$ ist eine Parabel.

q) Zeigen Sie, daß es für 4 verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 des $\mathbb{R}^2$ stets es eine Quadrik Q gibt mit $P_i \in Q$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

r) Sei $K = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ und $E_\lambda = (0\ 0\ \lambda)^T + \mathbb{R}(1\ 0\ 0)^T + \mathbb{R}(0\ 1\ 1)^T \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von λ) den Typ des Kegelschnitts $K \cap E_\lambda$.

Keine Abgabe!